

Ա.Ի. ԱԼԻԽԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ԱԶԳԱՅԻՆ ԳԻՏԱԿԱՆ ԼԱԲՈՐԱՏՈՐԻԱ

Իզմաիլյան Նիկոլայ Շահենի

ՈՐԻՎԵՐՍԱԼՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՎԵՐՁԱՎՈՐ ՉԱՓԻ ԷՖԵԿՏԵՐ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ
ՄԵԽԱՆԿԱՅԻ ԵՐԿՉԱՓ ՍՈՂԵԼՆԵՐՈՒՄ

Ա.04.02 – «Տեսական ֆիզիկայի» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՄԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2011

НАЦИОНАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ ИМЕНИ А.И. АЛИХАНИЯ

Измаилян Николай Шагенович

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ И ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА В ДВУХМЕРНЫХ
МОДЕЛЯХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
специальности 01.04.02 «Теоретическая физика»

ЕРЕВАН 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ա.Ի. Ալիխանյանի անվան ազգային գիտական լաբորատորիայում

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ
Ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր
Ռ. Մկրտչյան (ԱԱԳԼ ՊՈԱԿ, ք. Երևան, ՀՀ)
Ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր
Ռ. Պողոսյան (ԱԱԳԼ ՊՈԱԿ, ք. Երևան, ՀՀ)
Ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր
Լ. Շուր (ԻՏՏ, ք. Չերնոգոլովկա, Ռուսաստան)

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՏՃԼ ՄՖՇԻ Դուբնա, Ռուսաստան
Պաշտոնությունը կայանալու է 2011 թ. դեկտեմբերի 20-ին ժամը 14-ին Ա.Ի. Ալիխանյանի անվան ազգային գիտական լաբորատորիայում գործող ԲՈՂ-ի 024 մասնագիտական խորհրդում (Երևան-36, Ալիխանյան եղբայրների փ. 2)
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԱԱԳԼ ՊՈԱԿ-ի գրադարանում:
Մեղմագիրն առաքված է 2011 նոյեմբերի 18-ին

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար

Ֆիզմաթ գիտ. դոկտոր *Յ. Դազարյան* Է. Դ. Գազարյան

Тема диссертации утверждена в Национальной научной лаборатории им. А.И. Алиханяна.

Официальные опоненты:
доктор физико-математических наук
Р. Мкртчян (ГНКО ННЛА, г. Ереван, РА)
доктор физико-математических наук
Р. Погосян (ГНКО ННЛА, г. Ереван, РА)
доктор физико-математических наук
Л. Шур (ИТФ им. Ландау, г. Черноголовка, Россия)

Ведущая организация: Лаборатория Теоретической Физики, ОИЯИ, Дубна, Россия.
Защита состоится 20 декабря 2011 г. В 14 часов на заседании специализированного совета ВАК РА 024, действующего в Национальной научной лаборатории имени А.И. Алиханяна (375036, г. Ереван, Ул. Братьев Алиханян 2)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГНКО ННЛА.

Автореферат разослан 18 ноября 2011 г.

Ученый секретарь спец. совета

Доктор физико-математических наук *Յ. Դազարյան* Газазян Э. Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Краеугольным камнем в изучении фазовых переходов является принцип универсальности. Этим объясняется то, что целые группы систем ведут себя идентично вблизи критической точки, например, у критической точки перехода жидкости в газ в жидкостях или у точки Кюри в магнитах, где две фазы становятся неразличимыми. Критическая точка или точка Кюри, это та температура, при которой ферромагнит становится парамагнитом (его намагниченность падает до нуля). Вблизи критической точки термодинамические величины и критические экспоненты, характеризующие переход, не зависят от деталей межмолекулярных взаимодействий. Вместо этого, эти величины находятся в зависимости от симметрии гамильтониана, области взаимодействия и размерности пространства системы. Экспериментальные данные, анализ и симуляция моделей фазовых переходов, а также теория реонорм-групп (РГ) позволяют классифицировать критические системы по универсальности таким образом, чтобы у систем, входящих в одну и ту же группу, был одинаковый набор критических экспонентов. На основе теории РГ было также предложено, что системы, входящие в ту же группу универсальности, могли бы иметь универсальные функции скейлинга конечного размера и универсальные отношения амплитуд. Аналитические и численные расчёты для критических систем поддерживают идею универсальности отношений амплитуд.

Понятие универсальности обычно упоминается совместно с гипотезами скейлинга и скейлинга конечных размеров для термодинамических функций, находящихся вблизи критической точки. Теория эффектов конечных размеров и теория скейлинга конечных размеров вообще [1], с успехом применялась в основном для получения критических и некритических свойств безразмерных систем используя свойства их конечных и частично конечных аналогов. С точки зрения атома или молекулы, макроскопическая система такая огромная, что ее

часто рассматривают как бесконечно большую систему. Результаты сравнения теории и эксперимента, а также существующих различных теоретических подходов, в общем согласуются в разумных пределах. Однако, уже давно существуют трудности в согласовании скейлинга в ряде важных моделей. Некоторые из этих трудностей едва различимы. Например, есть маленькое, но существенное различие между экспериментальными и теоретическими значениями критических экспонент и отношений амплитуд для λ -перехода супержидкости в жидком гелии, который относится к классу трехмерной XY универсальности. По ныне существующей наиболее точной теоретической оценке (полученной в [2] с помощью анализа скейлинга конечного размера в Монте-Карло моделировании и высокотемпературного разложения) критической экспоненты в системах, описываемых классом трехмерной XY универсальности, предсказывается, что экспонента удельной теплоемкости $\alpha = -0.0151(3)$; это значение несовместимо с ныне принятым экспериментальным значением $\alpha = -0.01285(3)$ (измеренный на космическом челноке, с помощью эксперимента по теории микрогравитационного скейлинга [3]). Убедительное объяснение такому расхождению еще не найдено. Еще одним примером является то, что в замкнутой геометрии с характерной длиной L , для удельной теплоемкости $C(t,L)$ существует предсказание, исходящее из скейлинга конечного размера [4], однако, до сих пор, есть несоответствие между этим предсказанием и реальными экспериментами, проведенными в супержидкости гелия [5,6]. Важность такого несоответствия так велика, что стало обоснованием проведения безумно дорогого космического эксперимента с целью минимизации искажающего влияния гравитации Земли, и в тоже время стало обоснованием планирования дальнейших экспериментов [7,8]. Если в любом из планируемых экспериментов развалится теория о явлениях, связанных с критической точкой, то это стало бы фундаментальной проблемой в теоретической физике конденсированных сред и не только. Однако, вместо проблем с любым экспериментальным подходом, или же развала классификации и универсальности,

мы предлагаем возможное объяснение для этих расхождений, которые исходят из учета так-называемых поправок к скейлингу. В экспериментах и в цифровых расчетах модельных систем, важно учесть эффекты конечного размера. Скейлинговые свойства этих поправок к поведению бесконечных систем играют важную роль в нашем теоретическом понимании критического режима статистических систем.

В течение последних двух десятилетий, изучение эффектов конечного размера значительно продвинулось, а его важность для теории фазовых переходов и критических явлений увеличивалась в нарастающем темпе. В последние годы, эти вопросы были предметом интенсивного изучения для многих групп исследователей. Был применен широкий набор (спектр) теоретических методов, от метода Монте-Карло, до конформной теории поля.

Данная диссертация посвящена исследованиям с применением аналитических и вычислительных методов, универсальности и свойств конечных размеров в двумерных критических моделях статистической механики. В последнее время был достигнут большой прогресс по этим моделям, но многие интересные вопросы остались все еще без ответа.

Цель работы:

Целью диссертационной работы является исследование эффектов конечных размеров в двумерных моделях статистической механики. В частности:

- Исследование асимптотического разложения логарифма статистической суммы в свободных моделях статистической физики: модели Изинга, модели димеров и модели Гаусса.
- Исследование универсальности отношений амплитуд в асимптотическом разложении свободной энергии и корреляционной длины в Изинговском универсальном классе.

- Исследование влияний различных граничных условий на асимптотическое поведение свободной энергии и удельной теплоемкости в модели Изинга и в модели димеров.

- Исследование точных решений целого ряда моделей статистической механики, в том числе мономер-димер модели на квадратной решетке с цилиндрическими граничными условиями и обобщенной спин-3/2 модели Изинга

Научная новизна данной работы состоит в том, что в ней получены следующие результаты:

- Впервые получен бесконечный набор универсальных соотношений амплитуд в модели Изинга [И6,И20,И21,И22,И27,И28].

- Впервые получено точное асимптотическое разложение для свободной энергии, внутренней энергии и удельной теплоемкости в модели Изинга и в модели димеров. [И8,И9,И10,И11,И16,И17,И19,И24,И25].

- Получены новые тождества связывающие статистические суммы модели димеров на квадратной решетке при различных граничных условиях [И12].

- Получено точное асимптотическое разложение для сопротивления между двумя наиболее удаленными точками сети сопротивлений [И23].

- Найдено точное решение для мономер-димер модели определенной на квадратной решетке при цилиндрических граничных условиях и для обобщенной спин-3/2 модели Изинга на квадратной и гексагональной решетках [И1,И2,И26].

- Предложена и точно решена на Манхетенской решетке модель описывающая эволюцию вируса и иммунной системы [И18].

Научная и практическая ценность

Практическая ценность работы обусловлена актуальностью темы диссертации. Проведенные в работе теоретические исследования и разработанные методы могут быть непосредственно использованы при планировании

экспериментов в различных областях физики, таких как статистическая физика, физика твердого тела, нанофизика, биофизика, физика полимеров и т. д.

Основные положения выносимые на зачет:

- Исследование универсальности отношений амплитуд в асимптотическом разложении свободной энергии и корреляционной длины в Изинговском универсальном классе.

- Вычисление конечных поправок в модели Изинга. Получение точного асимптотического разложения для свободной энергии и удельной теплоемкости для модели Изинга на прямоугольной решетке при различных граничных условиях, таких как, периодические, спиральные и Браскамп-Кунц граничные условия.

- Вычисление конечных поправок в модели димеров. Получение точного асимптотического разложения для свободной энергии для модели димеров на прямоугольной решетке при различных граничных условиях, таких как, свободные, периодические, цилиндрические, лист Мебиуса и бутылки Клейна.

- Получение новых тождеств связывающих статистические суммы модели димеров на квадратной решетке при различных граничных условиях.

- Проведено также вычисление конечных поправок в модели резисторов и получено точное асимптотическое разложение для сопротивления между двумя наиболее удаленными точками сети сопротивлений.

- Исследование геометрии, термодинамики и конечных поправок в критических моделях Потса.

- Также получены точные решения для целого ряда моделей статистической механики, в том числе мономер-димер модели на квадратной решетке с цилиндрическими граничными условиями и обобщенной спин-3/2 модели Изинга.

Апробация работы.

Материалы диссертации были представлены и докладывались на международных конференциях:

- XXth IUPAP International Conference on Statistical Physics, Paris, France, 1998.
- 8th Asia Pacific Physics Conference, Taipei, Taiwan, 2000.
- First International Conference on Chaos and Supercomputers, Nor-Amberd, Armenia, 2000.
- International Conference on Theoretical Physics, TH2002, 22-27 July 2002, Paris, France, 2002.
- 6th Taiwan International Symposium on Statistical Physics, Taipei, Taiwan, 2002.
- International Conference on Statistical Physics and Dynamic Systems: Theory and Applications, Nor-Amberd, Armenia, 2003.
- 22nd International Conference on Statistical Physics, Bangalore, India, 2004.
- Taiwan Summer Symposium on Statistical and Nonlinear Physics, Taipei, Taiwan, 2005.
- Annual Meeting of the Physical Society of the Republic of China (Taiwan), Taiwan, 2004, 2006.
- 8th Taiwan International Symposium on Statistical Physics, Taipei, Taiwan, 2006.
- NCTS Workshops on Critical Phenomena and Complex Systems, Taipei, Taiwan, 2000-2011.

Материалы диссертации докладывались также на семинарах Национальной Научной Лаборатории им. А.И. Алиханяна (Ереванский Физический Институт) и Института Физики, Академии Синики, Тайпей, Тайвань.

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 25 статей в рецензируемых журналах и 3 тезиса конференций.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения; содержит 277 страниц печатного текста, включая 34 рисунка, таблицу и список литературы из 263 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В Главе 1 нами получены точные значения для набора универсальных отношений амплитуд для двухмерной (2D) модели Изинга на решетке $N \times \infty$, и одномерной (1D) квантовой модели Изинга, которая является квантовой версией классической 2D модели Изинга, при различных граничных условиях.

Обозначим свободную энергию на спин и обратную корреляционную длину модели Изинга на решетке $N \times \infty$ как $f(N)$ и $\xi^{-1}(N)$, соответственно, где $f(N) \rightarrow f(\infty)$, при $N \rightarrow \infty$.

В параграфе 1.1, получены аналитические уравнения для коэффициентов a_k и b_k в асимптотическом разложении для свободной энергии и обратной корреляционной длине

$$N(f(N) - f(\infty)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{N^{2k-1}} \quad (1)$$

$$\xi^{-1}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{N^{2k-1}} \quad (2)$$

для квадратной, шестиугольной и треугольной решеток, и найдено, что

$$r(k) = \frac{b_k}{a_k} = \frac{2^{2k} - 1}{2^{2k-1} - 1} \quad (3)$$

для всех этих решеток, т.е. отношение амплитуд a_k/b_k является универсальным. Для того, чтобы проверить, что уравнение (3) по-прежнему верно для других моделей в классе универсальности Изинга, мы изучили следующую самую простую модель, а именно, квантовую спиновую модель на одномерной решетке с N узлами с периодическими граничными условиями. Получены похожие разложения для критической энергии основного состояния E_0 и для критического энергетического интервала $(E_1 - E_0)$ квантовой спиновой цепочки, которые, соответственно, являются квантовыми аналогами свободной энергии и обратной корреляционной длины для модели Изинга, и обнаружено, что отношения амплитуд имеют те же универсальные значения. С физической точки зрения можно понять такой результат, используя пертурбативную конформную теорию поля.

В параграфе 1.2, нами получены точные значения для набора универсальных отношений амплитуд для 1D квантовой модели Изинга, которая является квантовой версией классической 2D модели Изинга, при свободных и антипериодических граничных условиях.

Получены аналитические уравнения для a_k и b_k в разложениях, представленных уравнениями (1) и (2), и найдены универсальные отношения амплитуд для 1D квантовой модели Изинга с антипериодическим граничным условием

$$r(k) = \frac{b_k}{a_k} = \frac{(2^{2k} - 1)B_{2k} - 2k}{2^{2k-1}B_{2k}} \quad (4)$$

а для свободных граничных условий получено

$$r(k) = \frac{b_k}{a_k} = \frac{4k}{(2^{2k-1} - 1)B_{2k}} \quad (5)$$

где B_{2k} – числа Бернулли. Насколько нам известно, никакие прежние РГ аргументы, аналитические или цифровые расчеты не предсказывали существование этого набора универсальных отношений амплитуд.

В параграфе 1.3, представлены точные расчеты для набора универсальных отношений амплитуд для двумерной (2D) модели Изинга на решетке $N \times \infty$ со специальными граничными условиями, изученными Браскампом и Кунцом [9]. Ими была рассмотрена решетка с $2N$ узлами в направлении x , и M узлами в направлении y . Граничные условия – периодические в направлении x , а в направлении y , спины принимают значение $(+1)$ вдоль верхней границы, и имеют альтернативные $(+1)$ или (-1) значения вдоль нижней границы цилиндра. Было показано, что асимптотическое поведение скейлинга конечного размера критической энергии $f(M)$ модели Изинга на бесконечно длинной ленте с границей Браскамп-Кунца, совместимо с предсказанием конформной теории поля для смешанных граничных условий, хотя смешанное граничное условие и граничное условие Браскамп-Кунца разные на одной стороне длинной ленты. Универсальные отношения амплитуд для 2D модели Изинга на решетке $N \times \infty$ со смешанными граничными условиями имеют следующий вид:

$$r(k) = \frac{b_k}{a_k} = -\frac{4k}{B_{2k}} \quad (6)$$

В параграфе 1.4, представлены точные расчеты для набора универсальных отношений амплитуд для модели Изинга с фиксированными $(+/-)$ граничными условиями. Получены аналитические уравнения для a_k и b_k в разложениях, представленных уравнениями (1) и (2), и найдено, что универсальные отношения амплитуд b_k/a_k имеют следующий вид:

$$r(k) = \frac{b_k}{a_k} = -2k \frac{3^{2k-1} - 1}{2^{2k-2} B_{2k} (1/2) + 2k} \quad (7)$$

где $V_k(1/2)$ – полином Бернулли. Нами было показано, что такое универсальное поведение точно воспроизводится при конформно-пертурбативном подходе.

В Главе 2, нами исследованы поправки конечного размера в модели Изинга. Мы получили точное асимптотическое разложение для логарифма статистической суммы для модели Изинга при периодических, спиральных и Браскамп-Кунцовских граничных условиях.

В параграфе 2.1, статистическая сумма для всех трех базовых моделей статистической механики (модель Изинга, модель димеров и модель Гаусса) выражена через статистическую сумму со скрученными граничными условиями $Z_{\alpha,\beta}(\mu)$:

$$Z_{\alpha,\beta}^2(\mu) = \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{m=0}^{M-1} 4 \left[\sinh^2 \mu + \sin^2 \frac{\pi(n+\alpha)}{N} + \sin^2 \frac{\pi(m+\beta)}{M} \right]$$

Мы получили: для модели Изинга

$$Z_{\text{Ising}} \propto Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mu) + Z_{0,\frac{1}{2}}(\mu) + Z_{\frac{1}{2},0}(\mu) + Z_{0,0}(\mu)$$

для модели димеров

$$Z_{\text{Dimer}} \propto Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^2(0) + Z_{0,\frac{1}{2}}^2(0) + Z_{\frac{1}{2},0}^2(0)$$

и для модели Гаусса

$$Z_{\text{Gauss}} \propto [Z_{0,0}(\mu)]^{-1}$$

Далее мы получили все члены точного асимптотического разложения логарифма от статистической суммы со скрученными граничными условиями

$Z_{\alpha,\beta}(\mu)$. Наш подход основан на тесной связи между членами асимптотического разложения и так называемого двойного ряда Кронекера.

$$\ln Z_{\alpha,\beta}(M,N) = S f_{\text{bulk}} + \ln \frac{\theta_{\alpha,\beta}(\rho)}{\eta(\rho)} - \pi \rho \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 p}{S} \right)^2 \frac{A_{2p}}{(2p)!} \frac{K_{2p+2}^{\alpha,\beta}(\rho)}{p+1}$$

Здесь S – площадь решетки, $\rho=M/N$ – соотношение геометрических размеров, M и N – число узлов в горизонтальной и вертикальной плоскостях, соответственно. f_{bulk} – свободная энергия системы бесконечного размера, $\theta_{\alpha,\beta}(\rho)$ – эллиптическая тета-функция, $\eta(\rho)$ – эта-функция Дедекинда, Δ_{2p} – дифференциальный оператор, и $K_{2p+2}^{\alpha,\beta}(\rho)$ – двойной ряд Кронекера.

Используя точное выражение для статистической суммы и точное разложение логарифма статистической суммы со скрученными граничными условиями $Z_{\alpha,\beta}(\mu)$, мы получили все члены точного асимптотического разложения свободной энергии (f) на торе для модели Изинга, модели димеров и модели Гаусса:

$$f = S f_{\text{bulk}} + f_0(\rho) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(\rho)}{S^p}$$

В параграфе 2.2, мы рассмотрели модель Изинга при граничных условиях Браскамп-Кунца [9]. Модель Изинга была точно решена при некоторых граничных условиях. Среди них – специальные граничные условия, рассмотренные Браскампом и Кунцом. Мы вывели все члены точного асимптотического разложения для свободной энергии, внутренней энергии и удельной теплоемкости критической ферромагнитной модели Изинга на $M \times 2N$ квадратной решетке с граничными условиями Браскамп-Кунца. Мы определили, что значения конечно-размерных поправок к свободной энергии и удельной теплоемкости являются целыми степенями N^{-1} (M^{-1}), кроме, разумеется, ведущего логарифмического члена в удельной теплоемкости.

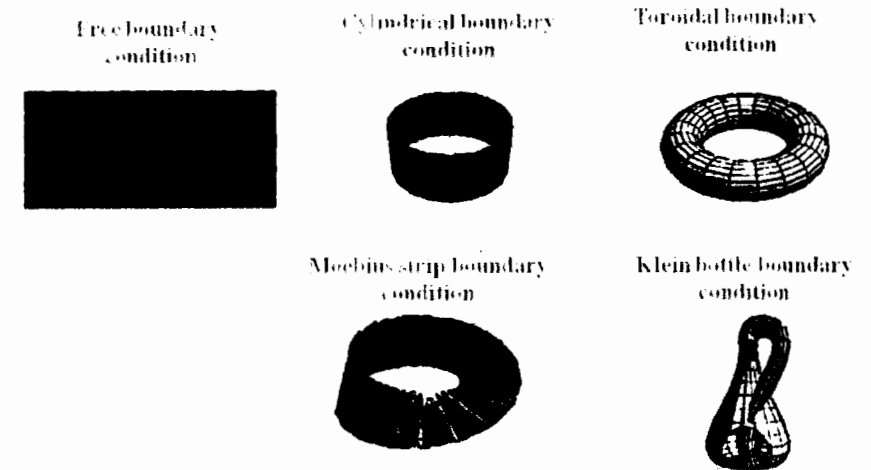
При $N \rightarrow \infty$ получено разложение в ряд свободной энергии для бесконечно длинной ленты с граничными условиями Браскамп-Кунца. Полученные нами результаты совместимы с предсказанием конформной теории поля для смешанных граничных условий, сделанным Cardy, хотя определения граничных условий в этих двух случаях разные на одной стороне длинной ленты.

В параграфе 2.3, мы рассмотрели модель Изинга при спиральных граничных условиях. Применяя точное выражение для статистической суммы, полученное Liaw, et al. [10] (Phys. Rev. E 73 (2006) 055101(R)), мы получили точное асимптотическое разложение для свободной энергии, внутренней энергии и удельной теплоемкости для модели Изинга при спиральных граничных условиях. Нами также получены точные выражения для эффективной критической точки для модели Изинга со спиральными граничными условиями. Скейлинг конечного размера для удельной теплоемкости в количественном отношении близок к величине, полученной на торе. Все поправки к скейлингу – аналитические. Экспонента сдвига, которая характеризует скейлинг эффективной критической (псевдокритической) точки, имеет значение $\lambda=1$ для всех значений коэффициента спиральности d , и равна обратному значению критической экспоненты корреляционной длины $1/\nu=1$. Мы нашли, что поправки конечного размера для свободной энергии, внутренней энергии, удельной теплоемкости, третьей и четвертой производных от свободной энергии модели в решающей мере зависят от коэффициента спиральности решетки.

Полученные нами результаты показывают, что метод, разработанный нами, весьма полезен для вычисления точных поправок конечного размера критических систем. Представляет интерес применение этого метода для вычисления точных поправок конечного размера для модели Изинга и для других свободных моделей на различных решетках с различными граничными условиями, так, чтобы можно было бы найти некоторые общие черты таких поправок конечного размера.

В Главе 3, нами исследованы эффекты конечного размера в модели димеров при пяти разных граничных условиях.

В параграфе 3.1, мы получили точное асимптотическое разложение для свободной энергии модели димеров на прямоугольной решетке при разных граничных условиях (периодические, свободные, цилиндрические, лента Мёбиуса и бутылка Клейна). Мы находим, что зависимость поправок конечного размера от соотношения геометрических размеров чувствительна к граничным условиям и к четности числа узлов расположенных вдоль оси решетки.



Точные выражения для статистической суммы модели димеров на прямоугольной решетке при различных граничных условиях мы выразили через статистическую сумму со скрученными граничными условиями $Z_{\alpha,\beta}(\mu)$, где $(\alpha,\beta) = (1/2,0)$, $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1/2)$. На основе этих выражений, мы получили несколько групп новых тождеств, которые связывают статистические суммы модели димеров для различных граничных условий:

$Z_{4M+2,2N}^{Klein} = 2 \cosh(2N\omega) Z_{2M,4N}^{Cylinder}$ $Z_{2M-1,4N+2}^{Cylinder} = \frac{\sinh(2M\omega)}{\sqrt{2}} (Z_{2M-1,2N}^{Free})^2$ $Z_{2M,4N+2}^{Cylinder} = \frac{\cosh(2M+1)\omega}{\sqrt{2}} (Z_{2M,2N}^{Free})^2$	$Z_{2M,4N}^{Cylinder} = (Z_{2M,2N}^{Moebius})^2$ $Z_{2M-1,4N}^{Cylinder} = \frac{1}{2} (Z_{2M-1,2N}^{Moebius})^2$ $Z_{2M-1,4N}^{Torus} = \frac{1}{2} (Z_{2M-1,2N}^{Klein})^2$	$Z_{4M-1,2N}^{Moebius} = Z_{2M-1,2N}^{Moebius} \sqrt{Z_{4M,4N}^{Klein}}$ $Z_{4M-1,2N}^{Cylinder} = Z_{2M-1,2N}^{Cylinder} Z_{4M,2N}^{Klein}$
--	---	--

В параграфе 3.2, мы рассмотрели эффекты конечного размера для модели димеров на конечных решетках со свободными граничными условиями (ленточная геометрия) и с периодическими граничными условиями в одном направлении (цилиндрическая геометрия). Во всех случаях мы нашли, что конечные поправки совместимы с центральным зарядом $s=-2$. К такому выводу мы пришли на том основании, что существует разница между центральным зарядом s и эффективным центральным зарядом $s_{eff} = s - 24h_{min}$, который является величиной, зависящей от границы. Значение $s=-2$ подтвердилось при вычислении эффекта изменения граничных условий. Было найдено, что в пределах скейлинга оно соответствует внедрению первичного граничного поля с весом $-1/8$, имеющее отношение к логарифмической конформной теории поля с $s=-2$. Мы устранили путаницу, существующую в литературе, насчет значения центрального заряда, которая возникла из-за неправильной интерпретации поправок конечного размера скорее в терминах центрального заряда, чем в терминах эффективного центрального заряда. Представлено также и взаимно-однозначное отображение модели димеров с остовным деревом и модели кучи песка Абеля (Abelian sandpile model), что позволило не только правильно понять димерную модель, но и оказалось очень полезным для вычисления более тонких эффектов, таких, как изменение граничных условий. С помощью этого отображения, мы объяснили почему изменение четности размера решетки вызывает изменение эффективного центрального заряда, но не вызывает изменение самого центрального заряда.

В параграфе 3.3, нами были изучены поправки конечного размера и скейлинга для модели димеров на треугольной решетки с периодическими граничными условиями. Сначала мы выразили точную статистическую сумму модели димеров на треугольной решетке с периодическими граничными условиями через статистическую сумму со скрученными граничными условиями $Z_{\alpha,\beta}(\mu)$, где $(\alpha,\beta) = (1/2,0)$, $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1/2)$.

На основе этих выражений, получено точное асимптотическое разложение первой и второй производных логарифма статистической суммы модели димеров на треугольной решетке в критической точке. Затем мы исследовали свойства функций скейлинга конечного размера модели димеров. Найдено, что димерная модель на треугольной решетке вблизи критической точки показывает очень хорошее скейлинговое поведение, и функции скейлинга конечного размера чувствительны к четности числа узлов вдоль оси решетки.

В Главе 4, нами исследованы эффекты конечного размера в модели Поттса и в сетке сопротивлений.

В параграфе 4.1, нами были получены точные асимптотические разложения для сопротивления $(R_{M,N}(r,s))$ между двумя максимально удаленными узлами на квадратной $M \times N$ сетки сопротивлений, при свободных, периодических и цилиндрических граничных условиях. Было показано, что точное асимптотическое разложение для сопротивления между узлами сетки при всех граничных условиях можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{s} R_{M,N}(r,s) = c(\rho) \ln S + c_0(\rho, \xi) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p(\rho, \xi)}{s^p}$$

где $\rho = r/s$, $S = M N$ – площадь решетки, и $\xi = M/N$ – соотношение геометрических размеров. В этом разложении, все коэффициенты выражены в виде аналитических функций. Вычисление асимптотического разложения

сопротивления между максимально удаленными узлами квадратной сети сопротивлений представляет значительный интерес, так как его значение задает нижнюю границу сопротивления компактных перколяционных кластеров в модели прямой перколяции Домани-Кинзела (Domany-Kinzel).

В параграфе 4.2, мы рассмотрели перколяционную модель с q -компонентными коррелируемыми ребрами на плоских решетках G с N узлами и E ребрами, которая является эквивалентом q -компонентной модели Поттса на G ; числа ребер и кластеров подграфа G' графа G обозначены $N_b(G')$ и $N_c(G')$, соответственно. В перколяционной модели с q -компонентными коррелируемыми ребрами, также как и в обычной перколяции, возникает естественный интерес к геометрическим свойствам, таким, как, например, число кластеров. Однако, термодинамика системы нетривиальна, что побуждает исследование связей между геометрией и термальным поведением. Мы рассмотрели этот вопрос исследуя универсальное поведение поправок конечных размеров (ПКР). С помощью точных вычислений мы показали, что при $q \neq 1$, ПКР для $\langle N_c \rangle$ находится в линейной зависимости от ПКР для $\langle N_b \rangle$, т.е. удивительным образом, число кластеров имеет энергоподобную сингулярность. Это в корне отличается от случая с $q=1$, который эквивалентен перколяции со случайными ребрами. Численное моделирование, теория скейлинга для бесконечных систем, и аргументы скейлинга конечных размеров подтверждают этот вывод. Последнее также означает, что в $\langle N_b \rangle$ отсутствует постоянный член конечного размера в критической точке, что однозначно было нами подтверждено для модели Изинга на квадратной решетке. Мы также нашли, что ПКР для $\langle N_c + g N_b \rangle$ и его высших кумулянтов ($g = 1/2$ для квадратной решетки) расходятся при $q \rightarrow 4$, что можно приписать к возникновению логарифмических поправок в мультিকритической точке, и это также понятно из теории ренорм-группы.

В Главе 5, мы точно решили некоторые модели двумерной статистической механики, такие как модель мономер-димер на цилиндрической решетке с одним мономером на границе, обобщенная спин-3/2 модель Изинга, общая $Z(4)$ калибровочная модель Поттса с единичным и двойным плакетным представлением действия, а также мы предложили и точно решили на специальной решетке (решетка Манхэттена) модель вирусной популяции с распределением с одним максимумом, которая развивается в присутствии адаптивной иммунной системы. Эту модель мы назвали моделью релаксирующих самоизбегающих блужданий (РСИБ).

В параграфе 5.1, мы рассмотрели простую прямоугольную решётку L , которая состоит из N рядов и M колонн, с периодическими граничными условиями в горизонтальном направлении. Для нечетных MN , а значит и для нечетных M и N , решетка не является двудольной. Однако, решетка может быть покрыта одним мономером и $(MN-1)/2$ димерами. Мы рассмотрели проблему оценки ее производящей функции, когда единичный мономер находится на границе. Производящую функцию $G(x,y)$ можно записать в виде

$$G(x,y) = \sum_{config} x^{n_1} y^{n_2}$$

где суммирование производится по всем мономер-димерным конфигурациям с единичным мономером на одной из двух границ, $x>0$ и $y>0$ – веса горизонтальных и вертикальных димеров, соответственно, и n_1 и n_2 – число горизонтальных и вертикальных димеров при условии $n_1 + n_2 = (MN-1)/2$.

Мы получили следующее точное выражение для производящей функции $G(x,y)$:

$$G(x,y) = 2Mx^{(M-1)/2}y^{(N-1)/2} \prod_{n=1}^{M-1} \prod_{m=1}^{N-1} \left(4x^2 \sin^2 \frac{2m\pi}{M} + 4y^2 \sin^2 \frac{2m\pi}{N+1} \right)$$

Таким образом, получено выражение в замкнутом виде для димер-мономерной производящей функции для мономер-димер модели на квадратной решетке при цилиндрических граничных условиях с единичным мономером на границе. Затем произведен анализ конечного размера для мономер-димер модели при свободных и цилиндрических граничных. Найдено, что поправки конечного размера имеют необычное поведение, что мы полностью объяснили в рамках $s=-2$ логарифмической конформной теории поля.

В параграфе 5.2, предложена модель вирусной популяции с распределением с одним максимумом, которая развивается в присутствии адаптивной иммунной системы. Модель, названная моделью релаксирующих самоизбегающих блужданий (РСИБ), хотя и будучи упрощенной, все еще сохраняет основные свойства общей системы.

Нашу модель можно описать следующим образом: при заданном графе G , вершины которого представляют из себя возможные состояния вирусной популяции, пики распределения вирусов в заданный момент дискретного времени мы ассоциируем с расположением случайно блуждающего субъекта у данного узла. Активность иммунной системы в первый момент времени описывается набором случайных чисел, однородно распределенных на каком-нибудь интервале. Начиная движение, случайно блуждающий субъект из ближайших соседних узлов выбирает тот узел, где активность иммунной системы минимальная, и прыгает туда. В начальном периоде времени, движение блуждающего субъекта совершенно случайное. В следующем периоде времени, появляется большее количество ранее посещенных узлов среди ближайших соседей каждого узла. Используя правило монотонного уменьшения активности, случайно блуждающий субъект выбирает узел, посещенный в самый ранний момент времени. В этом периоде времени, движение блуждающего субъекта становится более детерминированным, т.к. повышается концентрация посещенных

узлов. На последней стадии эволюции, когда все узлы в графе уже были посещены по крайней мере один раз, движение становится чисто детерминированным.

Показано, что движение блуждающего субъекта, на последней стадии сходится асимптотически в цикл, который проходит по всем узлам графа и имеет свойства длинномасштабных корреляций. Рассматривая конкретный граф (решетка Манхэттена), мы доказали, что предельный цикл представляет собой гамильтоновское блуждание, т.е. является замкнутой траекторией, которая обходит все узлы графа точно по одному разу. Элементы гамильтоновского блуждания представляют из себя сильно коррелированные объекты. Длинномасштабные корреляции на траектории блуждания одновременно означают те же корреляции в окружающей среде, а именно, корреляция активности иммунной системы в двух узлах, разделенных евклидовым расстоянием r , уменьшается по степенному закону r^{-1} .

Выбор решетки Манхэттена позволил нам избежать приближенных оценок корреляционных функций и строго доказать наличие длинномасштабных корреляций. Используя принцип универсальности, следует ожидать аналогичное поведение на любых решетках двумерной размерности.

В параграфе 5.3, точно решена обобщенная спин-3/2 модель Изинга на прямоугольной и шестиугольной решетках в подпространстве четырехмерного пространства по константам взаимодействия J , K , L и M .

Обобщенная спин-3/2 модель Изинга со взаимодействием между ближайшими соседями и вверх-вниз симметрией, описывается следующим гамильтонианом:

$$- \beta H = \sum_{\langle ij \rangle} \{ J s_i s_j + K s_i^2 s_j^2 + L s_i^3 s_j^3 + \frac{M}{2} (s_i s_j^2 + s_i^2 s_j) \} - \Delta \sum_i s_i^2$$

где $s_i = \pm 1/2, \pm 3/2$ – спин на узле i , а $\langle ij \rangle$ обозначает суммирование по парам ближайших соседних узлов.

Для обобщенной спин-3/2 модели Изинга на шестиугольной решетке, найдено точное значение статистической суммы в пространстве, стянутого по константам взаимодействия J , K , L и M . Получено точное выражение квадрупольного параметра порядка. Показано, что параметр порядка обычно находится в простой степенной зависимости от $T-T_c$ вблизи T_c .

Было показано, что обобщенная спин-3/2 модель Изинга на квадратной решетке, описанная с помощью самого общего гамильтониана с вверх-вниз симметрией, можно привести к восьмивершинной модели на поверхности в параметрическом пространстве, стянутого по константам взаимодействия J , K , L и M . Показано, что эта модель является эквивалентом точно решаемой фермионной модели вдоль двух линий в параметрическом пространстве. Следовательно, точно определены критическое поведение, и, в частности, критическая температура для фазовых переходов второго порядка в модели.

В параграфе 5.4, найдено точное решение для общей $Z(4)$ калибровочной модели Поттса с единичным и двойным плакетным представлением действия на подпространстве параметров калибровочных взаимодействий на квадратной и треугольной решетках. Найдены две Изинго-подобные линии фазового перехода второго порядка для модели на квадратной решетке. Для модели на треугольной решетке, были найдены две критические поверхности типа Изинга и две нетривиальные линии фазового перехода второго порядка, критическое поведение которых отличается от их критического поведения на критической поверхности. Показано, что двумерная (2D) общая $Z(4)$ калибровочная модель Поттса с единичным и двойным плакетным представлением действия и 2D модель Изинга со спином -3/2, относятся к одному и тому же классу универсальности.

ВЫВОДЫ

- Для моделей в Изинговском универсальном классе мы открыли новый набор (бесконечный) универсальных соотношений амплитуд и показали что их значения зависят только от граничных условий. Мы показали, что такая зависимость может быть объяснена в рамках конформной теории поля.
- Мы привели систематический метод расчета конечных поправок к статистической сумме и его производных в модели Изинга, модели димеров и модели Гаусса на торе. Наш подход основан на тесной связи между членами асимптотического разложения и так называемые двойными сериями Кронекера, которые непосредственно связаны с эллиптическими функциями.
- Мы выразили статистическую сумму модели димеров на конечной прямоугольной решетке при пяти различных граничных условиях (свободные, цилиндрические, тор, Мебиус лист и бутылка Клейна) через статистическую сумму с крученными граничными условиями $Z_{\alpha\beta}$ при $(\alpha,\beta)=(0,0)$, $(0,1/2)$, $(1/2,0)$ и $(1/2,1/2)$. Используя такое представление мы смогли получить точное асимптотическое разложение для свободной энергии в модели димеров для всех вышеперечисленных граничных условий. Мы также получили новые тождества связывающие статистические суммы для модели димеров при разных граничных условиях.
- Мы точно решили мономер-димер проблему на простой прямоугольной решетке с цилиндрическими граничными условиями, с мономером на границе решетки.
- Мы предложили и точно решили на специальной решетке (решетка Манхетена) решеточную модель для описания системы состоящую из популяции вируса и иммунной системы.
- Найдено точное решение для обобщенной спин-3/2 модели Изинга на квадратной и гексагональной решетках.

Литература

1. M. N. Barber, in Phase Transitions and Critical Phenomena, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic, New York, 1983), Vol. 8, p. 497.
2. M. Campostrini, et. al., Theoretical estimates of the critical exponents of the superfluid transition in ^4He by lattice methods, Phys. Rev. B 74 (2006) p. 144506 (18 pages).
3. JPL Fundamental Physics in Space: <http://funphysics.jpl.nasa.gov/technical/lcml/lcml-space.html>
4. Finite-size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems, edited by V. Privman (World Scientific, Singapore, 1990) p. 518.
5. F.M. Gasparini, M.O. Kimball, and K.P. Moonay, The superfluid transition of ^4He , a test case for finite-size scaling at a second-order phase transition, J. Phys.: Cond. Matt. 13 (2001) p. 4871-4890.
6. D. Murphy, et. al., Finite-Size Scaling and Universality of the Thermal Resistivity of Liquid ^4He near T_λ , Phys. Rev. Lett. 90 (2003) p. 025301 (4 pages)
7. M. Barmatz, I. Hahn, J. A. Lipa, R. V. Duncan, Critical phenomena in microgravity: Past, present, and future, Rev. Mod. Phys. 79 (2007) p. 1-52.
8. H. Eugene Stanley, Scaling, universality, and renormalization: three pillars of modern critical phenomena, Rev. Mod. Phys. 71 (1999) p. S358-S366.
9. H. J. Brascamp and H. Kunz, Zeroes of the partition function for the Ising model in the complex temperature plane, J. Math. Phys. 15 (1974) p. 65-66.
10. T. W. Liaw, M. C. Huang, Y. L. Chou, S. C. Lin, and F. Y. Li, Partition functions and finite-size scalings of Ising model on helical tori, Phys. Rev. E 73 (2006) p. 055101(R) (4 pages).

Основное содержание диссертации отражено в следующих публикациях:

- И1. N.Sh. Izmailian and N.S. Ananikian, General spin-3/2 Ising model in a honeycomb lattice: exactly solvable case, Phys. Rev. B 50 (1994) p. 6829-6832.
- И2. N.Sh. Izmailian, A spin-3/2 Ising model on a square lattice, JETP Lett. 63 (1996) p. 290-295.
- И3. N.S. Ananikian, R.G. Ghulghazaryan, N.Sh. Izmailian and R. Shcherbakov, Exact solution of a Z(4) gauge Potts model on planar lattices, Phys. Rev. E 60 (1999) p. 5106-5110.
- И4. Chin-Kun Hu, Jau-Ann Chen, N.Sh. Izmailian and P. Kleban, Geometry, thermodynamics and finite-size corrections in the critical Potts model, Phys. Rev. E 60 (1999) p. 6491-6495.
- И5. Chin-Kun Hu, Jau-Ann Chen, N.Sh. Izmailian and P. Kleban, Recent developments in Monte Carlo approach to percolation problem, Comput. Phys. Commun. 126 (2000) p. 77-81.
- И6. N.Sh. Izmailian and Chin-Kun Hu, Exact universal amplitude ratios for two-dimensional Ising model and a quantum spin chain, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) p. 5160-5163.
- И7. N.Sh. Izmailian, Exact finite-size corrections for lattice model, Book of abstract of the 2nd APCTP and 6th Taiwan International Symposium on Statistical Physics, (26 May - 1 June, 2002, Taipei, Taiwan), p. 43.
- И8. N.Sh. Izmailian and Chin-Kun Hu, Exact amplitude ratio and finite-size corrections for the $M \times N$ square lattice Ising model, Phys. Rev. E 65 (2002) p. 036103 (10 pages).
- И9. N.Sh. Izmailian, K. B. Oganessian and Chin-Kun Hu, Exact finite-size corrections for the square lattice Ising model with Brascamp-Kunz boundary conditions, Phys. Rev. E 65 (2002) p. 056132 (11 pages).

И10. E.V. Ivashkevich, **N.Sh. Izmailian** and Chin-Kun Hu, Kronecker's double series and exact asymptotic expansion for free models of statistical mechanics on torus, J. Phys. A 35 (2002) p. 5543-5561.

И11. Ming-Chya Wu, Chin-Kun Hu and **N.Sh. Izmailian**, Universal finite-size scaling functions with exact non-universal metric factors, Phys. Rev. E 67 (2003) p. 065103(R) (4 pages).

И12. **N.Sh. Izmailian**, K. B. Oganesyan and Chin-Kun Hu, Exact finite-size corrections of the free energy for square lattice dimer model under different boundary conditions, Phys. Rev. E 67 (2003) p. 066114 (14 pages).

И13. **N.Sh. Izmailian**, Finite size corrections for the dimer model, Book of abstract of the 22nd International Conference on Statistical Physics, (4-9 July 2004, Bangalore, India), p. 43. <http://www.physics.iisc.ernet.in/~statphys22/>

И14. **N.Sh. Izmailian**, Boundary effects in the dimer model and logarithmic CFT predictions, Book of abstract of the 2005 Taiwan Summer Symposium on Statistical and Nonlinear Physics, (31 July - 6 August, 2005, Taipei, Taiwan), p. 67. <http://www.phys.sinica.edu.tw/~statphys/activities/conference/2005/>

И15. **N.Sh. Izmailian**, V.B. Priezzhev, Philippe Ruelle and Chin-Kun Hu, Logarithmic conformal field theory and boundary effects in the dimer model, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) p. 260602 (4 pages).

И16. **N.Sh. Izmailian**, K.B. Oganesyan, Ming-Chya Wu and Chin-Kun Hu, Finite-size corrections and scaling for the triangular lattice dimer model with periodic boundary conditions, Phys. Rev. E 73 (2006) p. 016128 (9 pages).

И17. **N.Sh. Izmailian**, V.B. Priezzhev and Philippe Ruelle, Non-local finite-size effects in the dimer model, SIGMA 3 (2007) p. 001 (12 pages).

И18. **N.Sh. Izmailian**, V.VI. Papoyan, V.B. Priezzhev and Chin-Kun Hu, Self-organizing behavior in a lattice model for co-evolution of virus and immune systems, Phys. Rev. E 75 (2007) p. 041104 (7 pages).

И19. **N.Sh. Izmailian** and Chin-Kun Hu, Finite – size effects for the Ising model on the helical tori, Phys. Rev. E. 76 (2007) p. 041118 (17 pages).

И20. **N.Sh. Izmailian**, Universal amplitude ratios in the Ising model on the Bethe lattice, Electronic journal of natural sciences 11 (2008) p. 61-66.

И21. **N.Sh. Izmailian** and Chin-Kun Hu, Boundary conditions and amplitude ratios for finite-size corrections of a one dimensional quantum spin model, Nucl. Phys. B 808 (2009) p. 613-624.

И22. **N.Sh. Izmailian** and Yeong-Nan Yeh, Ising model with mixed boundary conditions: Universal amplitude ratios, Nucl. Phys. B 814 (2009) p. 573-581.

И23. **N.Sh. Izmailian** and Ming-Chang Huang, Asymptotic expansion for the resistance between two maximum separated nodes on a $M \times N$ resistor network, Phys. Rev. E 82 (2010) p. 011125 (12 pages).

И24. **N.Sh. Izmailian**, Finite-size corrections in the Ising model with special boundary conditions, Nuclear Physics B 839 (2010) p. 446-465.

И25. **N.Sh. Izmailian** and Ralph Kenna, Dimer model on a triangular lattice, Phys. Rev. E 84 (2011) p. 021107 (7 pages).

И26. F. Y. Wu, Wen-Jer Tzeng and **N.Sh. Izmailian**, Exact solution of a monomer-dimer problem: A single boundary monomer on a nonbipartite lattice, Phys. Rev. E. 83 (2011) p. 011106 (6 pages).

И27. **N.Sh. Izmailian**, Universal amplitude ratios for scaling corrections on Ising strips, Phys. Rev. E 84 (2011) p. 051109 (6 pages).

И28. **N.Sh. Izmailian**, Universal amplitude ratios for scaling corrections on Ising strips with fixed boundary conditions, Nuclear Physics B 854 (2012) p. 184-192.

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ամփոփման մեջ բերվում են ատենախոսության հետևյալ հիմնական արդյունքները:

- Ազատ էներգիայի և կոռելիացիոն երկարության ասիմպտոտիկ վերլուծության ամպլիտուդների հարաբերության ունիվերսալության ուսումնասիրությունը Իզինգյան ունիվերսալ դասում:
- Իզինգի մոդելի վերջավոր ուղղումների հաշվումը: Ազատ էներգիայի և տեսակարար ջերմունակության ճշգրիտ ասիմպտոտիկ վերլուծության ստացումը ուղղանկյուն ցանցի վրա Իզինգի մոդելի համար՝ պարբերական, պարբերային և Բրասկամպ-Կունցովսկիի եզրային պայմանների դեպքում:
- Դիմերների մոդելի վերջավոր ուղղումների հաշվումը: Ազատ էներգիայի և տեսակարար ջերմունակության ճշգրիտ ասիմպտոտիկ վերլուծության ստացումը ուղղանկյուն ցանցի վրա դիմերների մոդելի համար այնպիսի եզրային պայմանների դեպքում ինչպիսիք են՝ պարբերական, գլանային, ազատ, Մոբիլուսի թերթիկ և Կլեյնի շշեր: Ուղղանկյուն ցանցի վրա դիմերների մոդելի վիճակագրական գումարները կապով նոր առնչությունների ստացումը:
- Լուծված է մոնոմեր-դիմեր պրոբլեմը մեկ մոնոմեր եզրին ոչ երկկողմանի ցանցի վրա - պարզ ուղղանկյունային ցանց՝ գլանային եզրային պայմաններով:
- Վիրուսի պոպուլյացիայի և հարմարվողական իմունային համակարգի համատեղ էվոլյուցիայի համար առաջարկվել է ցանցային մոդել: Ցույց է տրվել, որ որոշ բնական ենթադրությունների դեպքում վիրուսի և իմունային համակարգի ակտիվության հավանականային բաշխումները էվոլյուցիայի ընթացքում ձգտում են ինքնակարգավորված կրիտիկական վիճակի: Կատարված է լուծման ուսումնասիրությունը վերջավոր չափսերի դեպքում: Ազատ էներգիայի ասիմպտոտիկ վերլուծությունից մենք գտանք վոր

լոգարիթմական կոնֆորմ տեսության կենտրոնական լիցքը ընդունում է $c=-2$ արժեքը:

- Մենք տալիս ենք մի փոխմիարժեք համապատասխանություն մի կողմից քառակուսային ցանցում դիմերների մոդելի, իսկ մյուս կողմից այսպես կոչված փոված ծառի (spanning tree) և Աբելյան ավազաթմբերի (sandpile) մոդելների միջև, որը ոչ միայն թույլ է տալիս ըստ էության հասկանալ դիմերների մոդելը, այլև հնարավորություն է ընձեռում հաշվել առավել նուրբ էֆեկտները: Օգտագործելով այս համապատասխանությունը մենք պարզաբանում և բացատրում ենք քառակուսային ցանցում դիմերների մոդելի կենտրոնական լիցքի արժեքին վերաբերվող այն զարմանահարույց թերրմբնումը, որ առկա է գրականության մեջ: Մենք ցույց ենք տալիս, որ քառակուսային ցանցում դիմերների մոդելի տարօրինակ վարքը վերջավոր չափսի դեպքում լիովին կարելի է բացատրել $c=-2$ լոգարիթմական կոնֆորմ տեսության շրջանակում:

- Օգտագործելով երկչափանի ցանցերում կրիտիկական q -վիճականի Փոթսի մոդելի ներկայացումը որպես q -վիճականի ըստ կողմերի կոռելացված պերկուլացիայի մոդել (QBCPM), մենք մի զարմանալի կապ ենք հաստատում երկրաչափության և թերմոդինամիկայի միջև: Մենք գտել ենք, որ QBCPM-ի կլաստերների N_c քանակը ունի էներգիայի տիպի եզակիություն $q \neq 1$ դեպքում, արդյունք, որը հաստատվում է թե՛ ճշգրիտ արդյունքներից, թե՛ թվային հաշվարկներից և թե՛ սքեյլինգային դատողություններից:

SUMMARY

In conclusion we enumerate the main results obtained in the thesis.

- For the Ising universality class we have discovered a new set (infinite) of the universal amplitude ratios whose values depends on the boundary conditions. We have show how such dependence of the universal amplitude ratios on the boundary conditions can be explained in the framework of the Conformal Field Theory.

- We have provided a systematic method to compute finite-size corrections to the partition function and their derivatives of the Ising, dimer and Gaussian models on torus. Our approach is based on an intimate relation between the terms of the asymptotic expansion and the so-called Kronecker's double series which are directly related to elliptic theta functions.

- We express the partition functions of the dimer model on finite square lattices under five different boundary conditions free, cylindrical, toroidal, Mo`bius strip, and Klein bottle in terms of the partition functions with twisted boundary conditions $Z_{\alpha,\beta}$ with $(\alpha, \beta) = (1/2, 0), (0, 1/2)$ and $(1/2, 1/2)$. Based on such expressions, we then derive the exact asymptotic expansion of the logarithm of the partition function for all boundary conditions mentioned above. We have also established several groups of identities relating dimer partition functions for the different boundary conditions.

We solve the monomer-dimer problem on a nonbipartite lattice, a simple quartic lattice with cylindrical boundary conditions, with a single monomer residing on the boundary. Finite-size analysis of the solution is carried out. We find from asymptotic expansions of the free energy that the central charge in the logarithmic conformal field theory assumes the value $c = -2$.

- We propose a lattice model for the co-evolution of a virus population and an adaptive immune system. We show that, under some natural assumptions, both probability distribution of the virus population and the distribution of activity of the immune system tend during the evolution to a self-organized critical state.

- We give a bijection of dimer model on square lattice with spanning tree and Abelian sandpile model, which not only allows a proper understanding of the dimer model but proves also very useful to calculate finer effects. Using this bijection, we clarify and explain the amazing confusion existing in the literature about the central charge of the dimer model on the square lattice. We find that unusual finite-size behavior of the dimer model on the square lattice can be fully explained in the framework of the $c=-2$ logarithmic conformal field theory.

- We establish an intriguing connection between geometry and thermodynamics in the critical q -state Potts model on two-dimensional lattices, using the q -state bond-correlated percolation model (QBCPM) representation. We find that the number of clusters N_c of the QBCPM has an energy like singularity for $q \neq 1$, which is reached and supported by exact results, numerical simulation, and scaling arguments. We also establish that the finite-size correction to the number of bonds, N_b , has no constant term and explains the divergence of related quantities as $q \rightarrow 4$, the multicritical point.

- We find the exactly solvable cases for the spin-3/2 Ising model on a square and honeycomb lattices described by the most general Hamiltonian with up-down symmetry.

